PROF. AMADOR MARTIN-PIZARRO
ÜBUNGEN: CHARLOTTE BARTNICK

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
WINTERSEMESTER 2022/2023

Modelltheorie
Blatt 6
Abgabe: 05.12.2022, 17 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L}$, sei $p(\bar{x})$ ein n-Typ in der $\mathcal{L}$-Theorie T derart, dass in jedem Modell $\mathcal{M}$ von T der Typ $p(\bar{x})$ nur endlich viele Realisierungen in $\mathcal{M}$ besitzt.

a) Zeige, dass es eine Formel $\varphi[\bar{x}]$ in $p(\bar{x})$ so gibt, dass $T \models \exists^{\leq N}\bar{x}\varphi[\bar{x}]$ für eine natürliche Zahl N.

b) Zeige mit Hilfe einer geeigneten Formel, dass $p(\bar{x})$ isoliert in $\mathrm{S}_n(T)$ ist, falls T vollständig ist.

Aufgabe 2 (16 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L} = \{R\}$ mit einem zweistelligen Relationszeichen R betrachten wir (ungerichtete) *Graphen*: Indem wir R als die Kantenrelation zwischen zwei verschiedenen Knoten interpretieren, sind Graphen genau die $\mathcal{L}$-Strukturen, in denen R irreflexiv und symmetrisch ist.

Ein *Zufallsgraph* ist ein Graph mit folgender Eigenschaft $(\star)$:

Für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B der Grundmenge (möglicherweise ist A oder B leer) gibt es einen Punkt c derart, dass c zu allen a aus A durch eine Kante verbunden ist und mit keinem b aus B.

(a) Zeige, dass es in einem Zufallsgraph unendlich viele solche Elemente c geben muss.

HINWEIS: Wieso gibt es ein c wie oben, das nicht in B liegt?

(b) Schließe daraus, dass der Graph, der aus einem Zufallsgraph entsteht, wenn ein einzelner Punkt (mit den entsprechenden Kanten) entfernt wird, wiederum ein Zufallsgraph ist.

Sei $n = \sum_{i=0}^{k}[n]_i \cdot 2^i$ die binäre Darstellung der natürlichen Zahl n, wobei $[n]_i = 0, 1$ für $0 \leq i \leq k$. Wir definieren nun die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ mit Universum $\mathbb{N}$ und folgender Intepretation:

$$R^{\mathcal{M}}(n, m) \;\Leftrightarrow\; [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1$$

c) Zeige, dass $\mathcal{M}$ ein Zufallsgraph ist.

d) Gib mit Hilfe von $(\star)$ eine Axiomatisierung T der Klasse von Zufallsgraphen an und zeige, dass T vollständig mit Quantorenelimination ist.

e) Zeige, dass jeder 1-Typ über einer endlichen Teilmenge eines Zufallsgraphs isoliert ist. Folgere, dass der obige Zufallsgraph $\mathcal{M}$ ein Primmodell von T ist, durch Konstruktion einer elementaren Einbettung von $\mathcal{M}$ in ein beliebiges Modell $\mathcal{N} \models T$.

Wie viele abzählbare Zufallsgraphen gibt es (bis auf Isomorphie)?

f) Ist T total transzendent?

g) Bestimme die Mächtigkeit des 1-Typenraumes $S_1^{\mathcal{M}}(M)$.

h) Zeige, dass es für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x, \bar{y}]$ eine Schranke $N = N_{\varphi[x,\bar{y}]}$ aus $\mathbb{N}$ so gibt, dass für jedes Tupel $\bar{b}$ aus M mit $X = \varphi[M, \bar{b}] = \{a \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi[a, \bar{b}]\}$ endlich schon $|X| \leq N$ gilt.

DIE ÜBUNGSBLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN. ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IM FACH 2.30 IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS.